Le réel est-il récursif ?

Roland Assous
UFR de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon1

Résumé

Quel est le pouvoir expressif de la répétition en mathématiques, suffit-il à définir le réel, quelle sont ses limites, quel en est l'enjeu ?

1 La répétition

En amont du feedback (en français *rétro-action*) et de son interactivité, se trouve le concept mathématique de récursivité. Du latin *recurrere* "courir en arrière", le terme récursif est emprunté à l'anglais *recursive* qui veut dire "revenant périodiquement". Il est très employé en informatique et dans une moindre mesure en mathématiques, dans le domaine très particulier de la logique.

Périodicité et régularité, contrairement à la répétition, n'apparaissent pas toujours dans l'objet défini mais seulement dans sa définition. Par exemple la suite constituée de 0 et de 1, commençant par un 0 puis un 1, puis deux 0 puis un 1, puis trois 0 puis un 1, etc.. (0 1 00 1 000 1 0000 1 ...) : le 1 apparaît répétitivement mais de moins en moins souvent, il n'apparaît pas régulièrement (à intervalles réguliers) mais par une boucle itérative, il y a pourtant régularité et même périodicité dans le programme très simple qui la définit.

Un programme récursif, est un programme qui dans son expression se met en jeu répétitivement en s'appelant lui-même. Lorsque dans cet appel (dit *appel récursif* en algorithmique) se mêlent de façon explicite ou non langage et métalangage on parle d'auto-référence. De la mise en abyme en littérature au dessin de la vache-qui-rit en passant par les jeux de mots de l'Oulipo ou les boutades du type un oignon est une pelure d'oigon renfermant un oignon, l'auto-référence est repérée dans de nombreux domaines et surprend toujours, sans doute à cause de la concision de son expression au regard des représentations qu'elle engendre.

La récursivité est, par essence dans le domaine mathématique, enracinée dans la définition et le raisonnement par récurrence où la répétition (de la définition ou de l'argument invoqué) prévaut, puis, plus subtile, elle s'exprime dans l'auto-référence, qui naît avec le paradoxe d'Epiménide ("je mens" ou "cette phrase est fausse") puis va jusqu'à intervenir en logique mathématique avec divers paradoxes comme l'antinomie de Russel ou le paradoxe de Richard[1](1905) et bien sûr avec les célèbres travaux de Gödel sur l'incomplétude[2].

La répétition, dont on pourrait penser qu'elle conduit à une sorte de pauvreté du discours qu'elle sous-tend, car liée aux caprices du hasard ou à la monotonie de la régularité, offre parfois des surprises : la suite de Thue-Morse [3], est une suite de 0 et de 1 telle que tout intervalle (c'est-à-dire ici toute sous-suite constituée de termes consécutifs) se répète infiniment souvent mais aucun ne se répète trois fois consécutivement. Elle donne l'impression d'un étrange équilibre entre monotonie et chaos.

Dans toute définition formelle d'objets mathématiques infinis, le principe de répétition est inévitable car elle comprend un nombre fini de mots. Et si l'on admet que ces définitions sont en accord

[1]voir plus bas la note (7).

[2]A cet égard, il est à noter cependant que le phénomène d'auto-référence, bien qu'essentiel dans les travaux originaux de Gödel, hormis l'inconsistance, n'est pas nécessaire car il existe depuis 1976 des illustrations du théorème d'incomplétude qui s'en affranchissent : ces illustrations, contrairement à la preuve originale de Gödel, font appel à des résultats de combinatoire *mathématiquement élaborés*.[9]

[3]Partant de 0, la suite de Thue-Morse est obtenue par le procédé récursif suivant : on juxtapose le mot obtenu précédemment et celui, de même longueur, obtenu en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0. Cela donne : 0 1 10 1001 10010110...

avec une réalité, ne serait-ce que la réalité mathématique elle-même, et qu'il y a adéquation entre le réel décrit par le jeu des déductions dans l'activité mathématique et le réel mathématique lui-même, constitué des objets mathématiques immédiatement perçus par l'intuition, peut-on conclure que le réel est radicalement récursif ? Quels sont les limites du pouvoir expressif de la répétition ? On va illustrer ces questions avec trois exemples classiques : le nombre réel, l'infini et l'aléatoire.

2 Le nombre réel

De Pythagore à Leibniz, de Dedekind et Gauss à Cantor et Hilbert, la construction des nombres tout au long de l'histoire s'est faite en surmontant de nombreux obstacles, heurtant ici ou là notre intuition première, allant de paradoxes en découvertes de nouveaux objets devenant de plus en plus formels, mais toujours porteurs d'une fascinante ambivalence par leurs caractère à la fois concret et abstrait.

Les nombres entiers sont constamment utilisés dans la vie quotidienne et nous paraissent si familiers que nous les trouvons concrets. Certes un bonbon, deux chats, trois cailloux sont bien concrets mais dans cet inventaire, l'enfant aura vite supprimé ce qui est superflu, le substantif, pour n'en garder que la trace - un, deux, trois - et dans une sorte de jeu jubilatoire, joue inlassablement à vouloir énumérer les entiers. C'est sans doute la première abstraction mathématique. L'entier, comme le point géométrique, est l'abstraction même, une entité idéale, parfaite, mais si incontournable qu'elle en devient une *réalité* qu'on appelle incidemment *entier naturel*. Puis vient l'heure des entiers négatifs, toujours par le même type d'abstraction (la référence au thermomètre) puis celle des fractions (les parts de gâteaux). Tous ces nombres paraissent bien concrets, réels. On découvre ensuite le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ dont l'existence s'étaye sur la diagonale du carré.

Ainsi donc la réalité du nombre réel peut résulter de sa représentation par le point géométrique, objet mathématique dont nous pouvons nous convaincre de son existence par la perception immédiate, quasi "visuelle", que nous en avons. Le développement décimal s'interprète aisément : les points représentant des entiers forment des intervalles. On subdivise chacun d'eux en dix intervalles de longueur égale, la première décimale étant déterminée par l'appartenance du point à l'un de ces intervalles. La deuxième décimale en subdivisant ce dernier en dix nouveaux intervalles et ainsi de suite, par itération de ce procédé. Ainsi à tout point géométrique est associé un nombre. Avec Descartes, l'association nombre/point géométrique de la droite a donné plus de rigueur à la géométrie qui, malgré l'évidente force intutive de ses axiomes, ne pouvait se justifier par elle-même.

On sait qu'un nombre est rationnel (c'est-à-dire quotient de deux entiers) lorsque son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Dans ce cas, la possibilité de description de la suite de ses décimales est potentiellement possible en dépit de son infinité. On peut par exemple décrire un procédé itératif, un *algorithme*, c'est-à-dire une suite finie d'actions (instructions ou opérations) conduisant au résultat d'un problème posé et dont l'exemple le plus classique est sans doute l'algorithme d'Euclide de la division de deux entiers qu'on apprend à l'école primaire. Mais cette définition de l'algorithme n'est pas suffisamment formelle pour en faire un objet mathématique à part entière. Il faudra attendre les travaux de Turing (1934) pour avoir une mathématisation de la notion de fonction calculée par un algorithme. Ce sont les machines abstraites de Turing, métaphore de la notion de fonctions calculables par un ordinateur et plus généralement d'objets pouvant être défini par un procédé *automatique*. Cela conduit à la notion de *réel récursif*, nombre pouvant être calculé par un *programme* : bien que comportant un infinité de décimales, on peut lui associer un algorithme permettant d'obtenir pour tout entier n sa n-ième décimale. Par exemple, les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ ou même π sont récursifs, comme tous les nombres qu'on utilise dans la pratique mathématique. Alors les nombres réels sont-ils tous récursifs ? La réponse dépend du système axiomatique que l'on choisit. Les réels qui ne sont pas récursifs doivent leur existence au système axiomatique formel que l'on se donne. Cette question peut être mise en lien avec celle de la continuité de la droite géométrique ; ainsi pour la plupart des mathématiciens, c'est ce point de vue qui est adopté et de ce fait la réponse est non. Contre toute attente, les réels récursifs sont extrêmement minoritaires. Cela peut être mis en évidence par un argument de *cardinalité*, notion introduite par Cantor à propos de l'infini. Remarquons que cette situation n'est cependant pas unique : les nombres algébriques[4] sont infiniment moins nombreux que les transcendants dont on penserait naïvement qu'ils sont rares.

3 L'infini

Lorsqu'en 1878, Cantor publia ses premiers travaux sur l'infini, il rencontra de la part du mathématicien Kronecker une vive opposition. Cela marquait le début d'une profonde divergence d'où résultèrent plus tard deux écoles : les intuitonnistes et les formalistes.

Mais comment des mathématiciens pouvaient-ils ne pas s'entendre ? Comment les mathématiques, reine des sciences, pouvaient-elles être le lieu de discordes ? Une démonstration est soit vraie soit fausse, et bien entendu les démonstrations des uns et des autres ne comportaient pas d'erreur mais il ne s'agissait pas de cela. La controverse ne se situait pas dans le champ mathématique proprement dit mais dans le champ métamathématique. Le désaccord portait sur la façon d'approcher ou de définir l'infini. Pour le finitiste Kronecker mais également Poincaré[5], et plus tard Brouwer, l'infini est potentiel et tout objet infini ne peut être "appréhendé" qu'à partir du fini, par des méthodes récurrentes. Kronecker préfigurait le mouvement intuitionniste de Brouwer, réactivé plus tard avec l'avènement de l'informatique théorique par Errett Bishop. De l'autre côté, il y avait Dedekink et Cantor, pour qui l'infini est actuel, pouvant être traité à priori comme tel dans sa globalité. La conception intuitionniste (ou constructiviste) de l'infini est à rapprocher du constructivisme de Kant en ce sens que la connaissance de l'infini résulterait d'une construction potentielle du sujet (le mathématicien) à partir de la connaissance des entiers. A l'inverse l'approche de Cantor est une position idéaliste platonicienne consistant à considérer l'infini comme existant à priori. Cette conception conduit à la définition non pas d'un infini présupposé unique mais *de plusieurs* infinis (une infinité d'infinis !). Cantor introduisit ainsi le monde fascinant des nombres transfinis ou ordinaux, ces nombres infinis sur lesquels il est possible d'opérer[6]. Cette approche marquait le début d'une nouvelle ère pour les mathématiques avec la théorie naïve des ensembles, mais elle comportait des fai-

[4] Un nombre est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers, par exemple $\sqrt{2}$ qui est racine du polynôme $X^2 - 2$. Un nombre *transcendant* est un nombre qui n'est pas algébrique. Le nombre transcendant le plus connu est le nombre π car il est lié au fameux problème de la quadrature du cercle qui consiste à trouver une construction à la règle et au compas d'un cercle et d'un carré ayant même périmètre (ou de manière équivalente trouver une construction à la règle et au compas d'un cercle et d'un carré ayant même aire. mann, en montrant que π est transcendant, démontrait que la quadrature du cercle n'a pas de solution.

[5] Nous donnons ici un extrait d'un texte de Poincaré cité dans [7] : *M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait montrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes. Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? On a pris des axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement. A mon sens d'ailleurs [...] aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par définition. [...] Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :*

- *Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;*
- *Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;*
- *Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.*

[6] Du point de vue de la logique, ce qui sépare fondamentalement les intuitionnistes des formalistes, c'est le principe du tiers exclu. Introduit par Aristote comme conséquence du principe de non contradiction, le principe du tiers exlcu consiste à accepter comme vrai toute proposition ou sa négation. Il revient à dire qu'une proposition est équivalente à sa double négation. La logique intuitionniste sur laquelle s'appuient les mathématiciens constructivistes, admet le principe de non contradiction mais pas celui du tiers exclu. Pour s'assurer qu'une proposition est vraie ou fausse, les construtivistes s'attachent à démontrer que soit elle est vraie soit sa négation est vraie. A titre d'exemple, on peut donner le célèbre raisonnement suivant : $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ démontre qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est rationnel. En effet soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel est c'est démontré : il suffit de choisir $a = b = \sqrt{2}$ qui est irrationnel, soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel et c'est encore démontré en choisissant $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. L'existence de a et b est ainsi démontrée pour un formaliste alors que cela ne l'est pas pour un constructiviste. Pour que cela le soit, il faut qu'il cite effectivement deux nombres a et b répondant à la question (ce qu'il fait en démontrant par exemple que les nombres réels e et $\ln 2$ sont irrationnels).

blesses mise en évidence par Russell[7] (1905). Cela déboucha sur ce qu'on appelle la *crise des fondements*. Cette dernière conduisit le mathématicien David Hilbert à appréhender le problème sous l'éclairage du *formalisme*. Il fallait considérer que l'essentiel était de savoir, pour une théorie mathématique, si elle est contradictoire ou non, c'est-à-dire s'assurer que le systèmes d'axiomes choisi ne finit pas par aboutir à une contradiction. Parmi les fameux vingt-trois problèmes qu'il posait au congrès international de mathématiques de 1900, un bon nombre devait faire partie d'une sorte de projet (le *programme finitaire de Hilbert*), selon lequel on espérait pouvoir finir par résoudre le problème de la crise des fondements[8]. En l'exprimant dans le langage de l'informatique, son programme revient à considérer que si l'on n'impose aucune contrainte de temps de calcul, il existe des procédures automatiques permettant à l'ordinateur de trouver toutes les vérités mathématiques. Le programme de Hilbert fut voué à l'échec par les travaux de Gödel sur l'incomplétude et ceux de Turing sur l'indécidabilité qui marquaient définitivement une différence entre *prouvabilité* et *vérité* : ce qui est vrai n'est pas nécessairement prouvable[9] Ceci n'empêcha pas, bien au contraire, le développement de ce qu'on appelle la *théorie descriptive des ensembles* (par opposition à la théorie *naïve* des ensembles introduite par Cantor) et le paradigme selon lequel *tout objet mathématique (ou presque) est ensemble* est

[7]Le concept mathématique d'*ensemble* provient de l'idée très simple suivante : faire un objet mathématique de ce qui est une *collection d'objets de même nature*. On peut parler d'un ensemble particulier de deux manières : dire explicitement quels sont ses éléments (définition en *extension*) ou donner la propriété commune qui les rassemble (définition en *compréhension*). A partir de cette définition naïve de la notion d'ensemble, on tombe très vite, par le jeu de l'auto-référence sur des effets indésirables et inacceptables pour le mathématicien car ce sont des paradoxes. En voici quatre, tous très célèbres :

– *l'ensemble de tous les ensembles.* Celui-ci ne peut exister car il contiendrait alors l'ensemble de toutes ses parties. Cantor montra que cette propriété est impossible.
– *l'antinomie de Russell*. Elle est obtenue par un procédé diagonal : en posant $a = \{x | \, x \notin x\}$ on a $a \in a \Leftrightarrow a \notin a$. Ceci peut être illustré de la manière suivante. En tant qu'ouvrage, un catalogue de bibliothèque peut se mentionner ou non. Si l'on constitue le catalogue C de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas, C doit-il se mentionner ? La réponse ne peut être oui car alors de par sa définition, ce doit être un catalogue qui ne se mentionne pas. La réponse est donc non ; mais alors il doit se mentionner puisque C répertorie tous les catalogues qui ne se mentionnent pas !
– *le paradoxe de Richard*. Si l'on énumère toutes les propriété des entiers, un entier est dit richardien si la propriété qu'il représente dans l'énumération est vérifiée par lui-même. Ainsi pour un nombre entier, *être richardien* et *ne pas être richardien* sont des propriétés qui ont elles-mêmes une place dans l'énumération. L'entier qui représente la propriété *ne pas être richardien* est-il richardien ? S'il l'est, alors il vérifie par définition la propriété qu'il représente et donc n'est pas richardien ; si non, alors il vérifie la propriété qu'il représente et donc il est richardien !
– *Une variante du paradoxe de Richard*. Considérons l'ensemble E des entiers qui se définissent au moyen de phrases comportant au plus 1000 mots. Ces phrases sont en nombre fini et donc l'ensemble E est lui-même fini. considérons alors le premier entier a qui n'appartient pas à E : le paradoxe est que l'entier a vient d'être défini en moins de 1000 mots et donc il appartient à E !

[8]La démarche de Hilbert consiste à définir d'abord un système d'axiomes. Le choix empirique de ces axiomes, acceptables car conformes à une intuition première, n'est pas évident et leur expression formelle n'est pas pas toujours simple. Avec les règles (universelles) de déduction de la logique telle le modus ponens (si A et $A \Rightarrow B$ sont vrais alors B est vrai) des démonstrations de *théorèmes*, c'est-à-dire de vérités, sont établies. Il est à noter que celle-ci sont constituées récursivement d'une suite *finie* de formules qui sont elles-mêmes des axiomes ou des théorèmes déjà établis ; ces vérités sont donc exprimées en termes purement syntaxiques et ont pour pour vocation d'être interprétées afin d'en retrouver le sens correspondant à une intuition initiale. Cette démarche implique que des propositions sont *vraies* dès lors qu'elles sont *démontrables* (ou *prouvables)* et donc consiste à vouloir produire *mécaniquement* des vérités. Reste à savoir si toutes les vérités peuvent être produites par ce moyen, autrement dit si toute vérité est *démontrable*...

[9]Tentons de donner en quelques lignes ce qu'exprime le théorème d'incomplétude : faisant suite à la note précédente, répondons d'emblée à la question *Toute vérité est-elle démontrable ?* Gödel montre qu'avec un système axiomatique pas très puissant mais suffisamment pour qu'il permette de prouver (syntaxiquement) tous les théorèmes d'arithmétique (le *système arithmétique de Peano*) qu'on a démontrés jusqu'à présent, il existe des propriétés sur les entiers qui sont vraies mais qui ne sont pas démontrables à l'aide de ce système d'axiomes. C'est le premier théorème d'incomplétude de Gödel. On dit que le système initial n'est pas *complet*. Il faut toutefois veiller à ne pas mal interpréter *propriété vraie* : cela veut dire ici propriété vraie donc démontrable dans un *autre système axiomatique*. Une frontière est ainsi établie entre ce qui est de l'ordre du prouvable et celui du vrai à l'extérieur d'un système axiomatique. Mais il y a plus fort : une propriété vraie mais non démontrable est une propriété dont la négation n'est pas démontrable non plus (sinon la première serait fausse). Alors on pourrait très bien considérer que cette vérité indémontrable est une vérité première et l'adjoindre en tant qu'axiome au système axiomatique initial. La situation est désespérée : Gödel montre qu'alors de *nouvelles propriétés* vraies apparaissent et sont indémontrables dans le nouveau système. Le nouveau système est lui aussi incomplet !. Gödel démontre de plus qu'une propriété non démontrable remarquable est celle de la consistance (non contradiction) du système axiomatique lui-même : il n'est pas possible d'établir à l'intérieur du système que le système d'axiomes choisi est non contradictoire.

toujours d'actualité.

Avec ces deux approches de l'infini, deux points de vue s'affrontent donc sur la perception de la réalité mathématique. Considérer avec les intuitionnistes que le réel mathématique ne dépend que de la perception ou de l'idée que nous en avons n'est sans doute pas très éloigné de la position métaphysique d'un Berkeley (existe ce qui se perçoit). L'idée d'infinis sans support *effectif*, non *concrétisés*, ne serait que concept creux, dénué de tout fondement. A l'inverse, l'approche idéaliste cantorienne, avec pour conséquence la continuité de la droite géométrique réelle représentant les nombres, consacrant le débat des physiciens sur le continu et le discret, créée de nouveaux horizons du réel mathématique qui fait dire à Hilbert : *Personne ne nous chassera du paradis que Cantor nous a créé.*

4 L'aléatoire

Faire de l'aléatoire un objet mathématique relève de la même difficulté. Tout le monde a l'idée de suite aléatoire de nombres. C'est une suite produite par le hasard, par exemple en lançant répétitivement un dé.

Mais est-il possible de caractériser mathématiquement les suites aléatoires, autrement dit d'en donner une formulation formelle afin d'être certain que ses termes se succèdent par le pur produit du hasard, sans être régis par la moindre règle ?

Il y eut diverses tentatives naturelles, utilisant la combinatoire : on a commencé par interdire naïvement la répétition comme d'abord la répétition consécutive de deux lettres ce qui donne la suite *abababab*... qui n'est pas autre chose que la répétition consécutive du motif *ab* ! Puis interdire, toujours avec deux lettres, la répétition consécutive de deux motifs quelconques : échec à nouveau, cela ne donne que les mots *a*, *b*, *ab*, *ba*, *aba*, et *bab*. La répétition consécutive de trois motifs ne convient pas non plus comme le montrent la suite de Thue-Morse évoquée plus haut. Les tentatives probabilistes portant sur des propriétés de fréquences des occurences des lettres dans la suite échouaient de la même manière car on finissait toujours par trouver une suite vérifiant la définition mais satisfaisant également à une "loi" régissant ses termes, et/ou obtenir un caracère prédictif de la présumée suite en trouvant un terme à partir de la donnée de ses précédents.

C'est avec Kolmogorov et Chaitin qu'une définition satifaisante de la suite aléatoire était donnée. Une suite est aléatoire lorsqu'elle est incompressible c'est-à-dire lorsque le nombre de caractères minimum d'un programme qui la définit est de l´ordre de la longueur de cette suite. Cela veut signifier le fait que toute tentative de définition concise de la suite est vaine : du point de vue de la complexité, il revient au même de la définir que de citer explicitement ses termes. Une suite aléatoire est donc incompressible mais aussi imprédictible dans le sens où la donnée des premiers termes ne laisse en rien trouver ce que peut être le terme suivant.

Chaitin démontre alors qu'on ne peut pas reconnaître dans un système formel donné qu'une suite de même complexité que le système est aléatoire. Il introduit un nombre réel, le nombre Ω, qui a cette étonnante propriété d'être défini mathématiquement et pourtant relevant du hasard absolu par sa complexité infinie, comme si chaque chiffre le composant dans son écriture, était une surprise complète. Cela vient contredire le point de vue classique, selon lequel, avec Leibniz, le hasard ne fait que traduire notre incapacité à avoir une connaissance exhaustive des paramètres expliquant le déterminisme et donc ne peut être un élément de la réalité mathématique.

Aristote, distinguait deux approches du hasard : d'un côté, *automaton*, pour la spontanéité, pour ce qui n'est pas de l'ordre de la prévision, par manque d'une connaissance exhaustive des paramètres, avec lesquels tout peut être calculé. De l'autre, *tukê*, qui est de l'ordre de l'aléatoire absolu, de l'imprévisible, relevant de la pure rencontre, de l'inattendu. L'approche classique du hasard est celle de l'automaton. Chaitin vient la bousculer en montrant que tuké est nichée au coeur même des mathématiques. Il confirme ainsi la formidable intuition de Peirce dans ce qu'il appelait le *tychisme*, cette indétermination absolue qui n'est pas seulement le résultat de notre ignorance des causes mais celui *d'une impossibilité ontologique, d'une lacune essentielle dans le système des nécessités* (Lalande).

5 Conclusion ?

Le mathématiticien, dans ces différentes approches, semble louvoyer entre variation et répétition. Cela n'est pas sans rappeler cette hésitation constante, ce sentiment d'inquiétante étrangeté produite par l'écoute musicale des mots de Thue-Morse[10]. La variation est étroitement liée à la répétition, l´une et l´autre se trouvant dans le même rapport d´exigence d´apparition et de disparition, comme répondant à l´attente d´un plaisir ou d´un doute sans cesse renouvelés. Avec la répétition, le mathématicien, qu'il soit intuitionniste, réaliste ou idéaliste, en cherchant à exprimer ce qui pourrait être l'objet d'un savoir, celui de la réalité mathématique, ne se trouve-t-il pas confronté à la dimension, plus générale, du réel ?

Selon Freud, l'homme a connu trois humiliations avec les théories de Copernic (la terre n'est pas au centre l'univers), Darwin (l'homme suit la loi de l'évolution) et Freud lui-même (par l'existence de l'inconscient, l'homme n'est pas maître en lui-même). En le parodiant, on pourrait dire que le mathématicien connaît trois grandes frustrations qu'on peut résumer en trois mots : *incomplétude, incalculabilté, imprédictibilité*. Avec Gödel, c'est le théorème d'incomplétude (toutes les vérités ne peuvent être démontrées), avec Turing c'est l'existence de nombres incalculables, ainsi que l'impossibilté de savoir par le calcul qu'un programme s'arrête ou non, avec Chaitin, c'est l'impossibillité de reconnaître, dans un système donné, l'aléatoire de même complexité.

Mais ces frustrations sont liées à la règle fondamentale du mathématicien : la rigueur. Alors comment s'étonner que les désaccords entre mathématiciens proviennent des systèmes d'axiomes choisis ? La réalité mathématique serait-elle réduite au bon choix d'un système formel ? Gödel lui-même avait la conviction que la réalité mathématique est à découvrir. Car le mathématicien est d'abord et avant tout un idéaliste platonicien. Dans son activité, par la résistance des problèmes qu'il cherche à résoudre, il sent que les concepts sont là, que la réalité est là. L'objet mathématique n'est pas seulement le fruit de ses représentations mentales mais un objet préxistant à la définition qu'il en donne, un objet qu'il découvre et qui paradoxalement lui suffit considérant peut-être comme Lévinas (à propos d'un tout autre sujet [6]) que *la liberté de l´esprit annonce le souci d´entretenir avec la vérité un lien intérieur : s´effacer devant le vrai, mais dans cet effacement se sentir le maître comme le mathématicien qui s´incline devant l´évidence, conscient d´une suprême liberté.*

[10] cf. les illustrations musicales de Yann Orlarey (R.Assous, *Deux ou trois remarques sur l´utilisation des mots de Thue-Morse en informatique musicale* in Orlarey Y. et Genevoix, H., *Actes des Rencontres Musicales Pluridisciplinaires - Musique & Mathématiques*. Grame, 1996)

Références

[1] Roland Assous, Denis Richard. *Les travaux de Kirby, Paris & Harrington ou "Un théorème non prouvable dans l'arithmétique de Peano"*. Séminaire d'Algèbre Ordinale. Université Lyon-1, 1990.

[2] Erret Bishop. *The Foundations of Constructive Analysis*. MacGraw-Hill, 1967.

[3] Gregory Chaitin. *Meta Math !* Pantheon Books, 2005.

[4] Douglas Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach*. Interéditions, 1979.

[5] Jean Largeault. *L'intuitionnisme*. P.U.F. Que sais-je ?, 1992.

[6] Emmanuel Levinas. *Difficile liberté*. Albin Michel, 1963.

[7] Henri Lombardi. Le programme de Hilbert. *Repères IREM*, 2002.

[8] E. Nagel, J. R. Newman, K. Gödel, and J-Y. Girard. *Le théorème de Gödel*. Seuil, 1997.

[9] J. Paris and L. Harrington. *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic.*, volume 90. New York : North-Holland Publishing Company., 1977.

[10] Daniel Parrochia. *Mathématiques et Existence*. Champ Vallon, 1991.

[11] Henri Poincaré. La logique de l'infini. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1909.